

# Module 11 Radon-Nikodym theorem

## 11.1 Radon-Nikodym Theorem [Fol 3.2]

以下是两个 instructive 的 questions:

Question 1: Given 三个 s.m. on

$$\mu = m + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{x_j} + \mu_{Cantor}$$

on  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , 我们可否从  $\mu$  中 recover 其中一个 measure, without 另外两个 measure?

$$\mu_{Cantor} = (?)\mu$$

Question 2: 给定一个任意的 p.m.  $\mu$ , 以及一个任意的 s.m.  $\nu$  on  $(X, \mathcal{A})$ ,

如何判断是否存在一个  $f \in L^1(\mu)$ , 使得

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

以及, 如果存在, 如何找到这样的  $f$ ?

### 11.1.1 absolutely continuous: $\nu \ll \mu$

**Def 11.1 (a s.m. absolutely continuous w.r.t. a p.m.)**

给定 p.m.  $\mu$  和 s.m.  $\nu$  on  $(X, \mathcal{A})$ , 我们称  $\nu$  is absolutely continuous w.r.t.  $\mu$ , 如果

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

即:  $\nu$  的 null sets 包含了  $\mu$  的所有 null sets. ( $\nu$  拥有比  $\mu$  严格更多的 null sets)  
写作

$$\nu \ll \mu$$

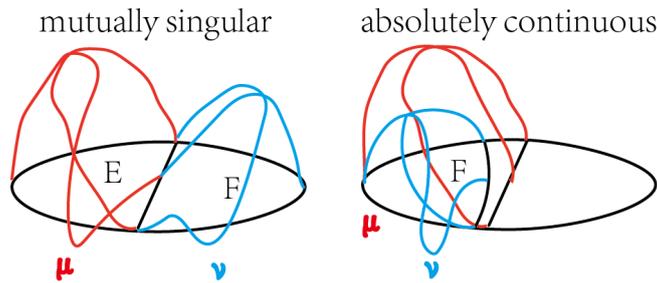


Figure 11.1: mutually singular and absolutely continuous

$\nu \perp \mu$  表示的是  $\nu$  和  $\mu$  出现变化的区域完全不同, 而  $\nu \ll \mu$  表示的是  $\nu$  出现变化的区域完全包括在  $\mu$  出现变化的区域里 (因为  $\mu$  不变化的区域被包括在  $\nu$  不变化的区域里).

**Example 11.1**  $f \in L^1(\mu)$ ,  $\nu(E) := \int_E f d\mu$ , 由积分定义出的 s.m., 总是满足

$$\nu \ll \mu$$

**Example 11.2**

$$\nu_1 := m, \quad \nu_2 := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta_{x_j}, \quad \nu_3 := \mu_{Cantor}$$

这三个 measure 有

$$\nu_i \not\ll \nu_j \quad \forall i \neq j$$

它们是 mutually singular 的. 对于其中任意两个  $\nu_i, \nu_j$ , 本身已经存在一个划分使得  $\nu_i$  在  $E$  上是 null 的而  $\nu_j$  在  $E^c$  上是 null 的. 那么如果  $\nu_i \ll \nu_j$ , 则说明  $\nu_i$  在  $E^c$  上也是 null 的, 那么  $\nu_i$  在整个  $X$  上都是 null 的, 说明  $\nu_i$  是一个 trivial measure.

显然, 这里三个 measure 都不是 trivial measure, 因而它们之间没有 abs ctn 的关系.

**Proposition 11.1 (absolutely continuous 的性质)**

- 

$$|\nu| \ll \mu \iff \nu^+ \ll \mu \text{ and } \nu^- \ll \mu$$

(容易证明)

- 

$$\nu \perp \mu \text{ and } \nu \ll \mu \implies \nu = 0$$

(刚才已经证明)



我们可以把 absolutely ctn 的概念从一个 s.m. wrt 一个 p.m. 扩展到一个 s.m. wrt 一个 s.m., by taking 后面这个 s.m. 的 total variation measure:

$$\text{say } \nu \ll \mu, \text{ if } \nu \ll |\mu|$$

但是 Folland 表示我们之后并不需要用到这个更 general 的定义. 所以不用在意它.

**11.1.2  $\nu \ll \mu$  的等价条件**

question: 为什么这个定义要叫做 absolutely continuous, 它和 continuous 这个词到底有什么关系. 下面这个 theorem 说明了这一点.

**Theorem 11.1 (why it is called "absolutely continuous")**

令  $\nu$  为一个 finite s.m.,  $\mu$  为一个 p.m. on  $(X, \mathcal{A})$ .

Claim:

$$\nu \ll \mu \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |\nu(E)| < \epsilon \text{ whenever } \mu(E) < \delta$$



**Remark** 类比:  $f(x)$  is uniform ctn function of  $x$ : 对于任意  $\epsilon$  都存在  $\delta$  使得  $|f(y) - f(x)| < \epsilon$  whenever  $|x - y| < \delta$ .

而 finite s.m. 的 absolutely ctn  $\nu \ll \mu$  也是一个连续性表达: 我们以 measure  $\mu$  作为集合大小的度量基准, 对于任意集合, 对其进行很小的调整改变其  $\mu$ -大小 (比如去掉/并上一个  $\mu$ -小集合),  $\nu$  的值的改变相对于这个  $\mu$ -大小调整是连续的. (可以更改这个  $\mu$ -大小调整尺度, 使得  $\nu$  的值的改变任意小)

我们经过思考可以发现, 这和我们之前说的 " $\nu \ll \mu$  表示的是  $\nu$  出现变化的区域完全包括在  $\mu$  出现变化的区域里" 是一致的, 因为这即说明对于 finite  $\nu$  受到  $\mu$  的可控制性 (不存在失控的区域): 既然只有在

$\mu$  的 variation 区域才出现 variation, 那么取它们相对 variation 的最大比例, 那么总是可以通过  $\mu$ , 把  $\nu$  的 variation 控制在这个 variation 比例之上.

**Proof** (i) to (ii): 我们使用反证, 利用 **limsup**.

Assume (i), 并 suppose for contradiction that (ii) 不成立.

那么存在  $\epsilon > 0$  s.t. 对于任意  $n \in \mathbb{N}$ , 都存在一个 seq  $E_n \in \mathcal{A}$  s.t.  $\mu(E_n) \leq \frac{1}{2^n}$ ,  $\nu(E_n) \geq \epsilon$  for each  $n$ .

Set

$$E := \limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

我们标记后面的每个集合为:

$$F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

于是

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

从而得到,

$$\mu(E) = 0$$

而由于  $\nu(F_n) \geq \epsilon$  for each  $n$ , we have

$$\nu(E) \geq \epsilon$$

这与  $\nu \ll \mu$  contradict. 从而得证:  $\nu \ll \mu \implies \delta$ - $\epsilon$  argument.

而  $\delta$ - $\epsilon$  argument  $\implies \nu \ll \mu$  是 trivial 的.

### 11.1.3 RN derivative and RN Thm

#### 11.1.4 RN derivative: (if exist) express how $\nu$ can be induced from $\mu$

##### Def 11.2 (Radon-Nikodym derivative)

对于  $\begin{cases} \text{p.m. } \mu \\ \text{s.m. } \nu \end{cases}$  on  $(X, \mathcal{A})$ , 如果存在一个  $\mathcal{A}$ -measurable  $f$ , 使得  $\nu$  为 the **signed measure  $\nu$  induced by  $\mu$  and  $f$** :

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

则称  $f$  is the **Radon-Nikodym Derivative of  $\nu$  w.r.t.  $\mu$** . 写作

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

或者

$$d\nu = f d\mu$$



Radon-Nikodym derivative  $f$  刻画的是在每一点  $x \in X$  上, **signed** 测度  $\nu$  相对于测度  $\mu$  的变化速率.

We sometimes call  $\nu$  **the signed measure  $f d\mu$** .

**Example 11.3** 取 LS measure  $\mu_F$  on  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , with  $F = e^{2x}$ .

那么:

$$\mu_F((a, b)) = e^{2b} - e^{2a} = \int_a^b 2e^{2x} dx$$

我们可以 check:

$$\mu_F(E) = \int_E 2e^{2x} dx, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

因而

$$\frac{d\mu_F}{dm} = 2e^{2x} = F'(x)$$

### Proposition 11.2

任取 measure  $\mu$ , 以及 extended  $\mu$ -integrable function  $f$ , 那么 the **signed measure  $\nu$  induced by  $\mu$  and  $f$**  即  $\nu(E) := \int_E f d\mu$  一定有:

$$\nu \ll \mu$$

**Proof** trivial.

Question: 我们如何判断这个 RN derivative 是否存在呢? Radon Nikodym Theorem 正是这个问题的答案.

### 11.1.5 RN Thm: $\sigma$ -finite $\nu \ll \mu \iff$ 存在 RN derivative

#### Theorem 11.2 (Radon-Nikodym Theorem)

对于  $\sigma$ -finite  $\begin{cases} \text{p.m. } \mu \\ \text{s.m. } \nu \end{cases}$  on  $(X, \mathcal{A})$ ,

$$\nu \ll \mu \iff \exists \text{ ext. } \mu\text{-intble } f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

并且这个 RN derivative  $f$  是 **unique** 的, in  $\mu$ -a.e. sense. (即在  $\mu$  的一个 null set 之外唯一).

Radon Nikodym Theorem 表示, 对于  $\sigma$ -finite 的  $\nu$  和  $\mu$ , RN derivative 存在 (并且一定唯一) 当且仅当  $\nu \ll \mu$ . 即对于任意两个 abs ctn 的 measure, 只要它们  $\sigma$ -finite, 就可以用一个具体的函数  $f$  来表达它们之间的关系.

要证明 RN Theorem, 我们还需要一些 Lemma.

#### Lemma 11.1

如果  $\nu, \mu$  都是 **finite positive** measure on  $(X, \mathcal{A})$  并且  $\mu \perp \nu$ , 那么一定存在  $\epsilon > 0$  以及  $E \in \mathcal{A}$  with  $\mu(E) > 0$  s.t.

$$\nu \geq \epsilon\mu \quad \text{on } E$$

**Proof** We look at  $\nu - \frac{1}{n}\mu$  for each  $n \in \mathbb{N}$ . 它们都是 finite signed measure for sure.

考虑 Hahn decomposition  $P_n \sqcup N_n$  for each  $n$ . 并 set:

$$P := \bigcup_n P_n, \quad N := \bigcap_n N_n = P^c$$

于是:  $N$  对于任意  $n$ , 都是  $\nu - \frac{1}{n}\mu$  的 negative set.

这说明:

$$\forall n, 0 \leq \nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$$

因而一定有:

$$\nu(N) = 0$$

(这是显然的, 因为  $N$  intersect 了所有的  $\nu - \frac{1}{n}\mu$  的负集, 在  $n$  大的时候这个 diff measure 基本等于  $\nu$ , 而  $\nu$  本身是 positive 的, 那么显然  $\nu(N) = 0$ .)

Case 1: 如果  $\mu(P) = 0$ , 那么  $\mu \perp \nu$ .

Case 2: Otherwise then 存在某个  $\mu(P_n) > 0$ , 说明  $P_n$  是  $\nu - \frac{1}{n}\mu$  的 positive set, 因而在  $P_n$  上,  $\nu \geq \frac{1}{n}\mu$ .

这个 Lemma 表明, 对于两个 positive measures, 它们要么 mutually singular, 要么一定存在某个 nontrivial 的集合上, 一个能够以一定比例 bound 另外一个.

这是因为, 只要这两个 positive measures 不是 mutually singular 的 (说明它们有共同的存在变化的区域), 那么 note that positive measure 随着集合增大一定是增大的, 因而直觉上肯定存在某个子集, 使得其上, 它们其中一个能够以一定比例 bound 另外一个.

现在我们证明 RN Thm:

**Proof of RN Thm:**

**Step 1: 首先确认 uniqueness, if exist.**

首先我们 assume  $\nu, \mu$  都是 finite p.m.

我们先 verify **uniqueness**: 假设

$$d\nu = f_1 d\mu = f_2 d\mu, \quad f_i \text{ ext. } \mu\text{-intble}$$

那么令  $g := f_1 - f_2$ , 有

$$\int_E g d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

所以  $g = 0$  a.e.

This shows the uniqueness.

然后我们 verify **existence**:

我们考虑

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(\mu) : \int_E f d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{A} \right\}$$

We can define partial order on  $\mathcal{F}$ : 称  $f_1 \leq f_2$  if  $f_1(x) \leq f_2(x)$  for a.e.  $x$ .

显然  $f = 0$  是  $\mathcal{F}$  中最小的元素. Idea: 我们想要得到  $\mathcal{F}$  中最大的元素  $f_{max}$ , 看看是否能取到总是有

$$\int_E f_{max} d\mu = \nu(E)$$

**Step 2: Claim**  $f_1, f_2 \in \mathcal{F} \implies f := \max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{F}$

Proof of Claim: for fixed  $f_1, f_2$ , 考虑  $A := \{f_1 > f_2\}$ . 任取  $E \in \mathcal{A}$ , 有:

$$\int_E f d\mu = \int_{E \cap A} f_1 d\mu + \int_{E \cap A^c} f_2 d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E)$$

Claim proved.

**Step 3: 构造出 potential RN derivative:** 最大的元素  $f \in \mathcal{F}$  现在我们 set

$$a := \sup \left\{ \int f d\mu \mid f \in \mathcal{F} \right\}$$

显然有:

$$1 \leq a \leq \nu(X)$$

pick  $g_n \in \mathcal{F}$  s.t.  $\int g_n d\mu \nearrow a$ , 并且 set

$$f_n := \max\{g_1, \dots, g_n\}$$

for each  $n$ .

显然有:

$$f_n \leq f_{n+1}, \quad \int f_n d\mu \nearrow a$$

并且根据我们的 claim, 所有  $f_n \in \mathcal{F}$ .

根据可测函数的性质,

$$\exists f := \lim_n f_n \in L^+(\mu), \text{ and } \in L^1(\mu) \text{ (since } \mu \text{ finite)}$$

并且根据 MCT,

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = a$$

并且, 对于任意  $E$  measurable, 根据 MCT 也有

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \nu(E)$$

我们 set:

$$\nu'(E) := \int_E f d\mu$$

**Step 4: 证明  $\nu' = \nu$ .**

Proof: 首先我们知道 by def  $\nu' \leq \nu$ .

Set:

$$\tilde{\nu} := \nu - \nu' \geq 0$$

By our assumption  $\nu \ll \mu$ , 从而也有  $\tilde{\nu} \ll \mu$ .

因而只需要证明  $\tilde{\nu} \perp \mu$ , 就可以得到  $\tilde{\nu} = 0$ , 从而证明出  $\nu' = \nu$ .

这个时候 Lemma 就起了作用:

Suppose for contradictin that  $\tilde{\nu} \not\perp \mu$ , 那么 by lemma, 由于  $\tilde{\nu}$  是一个 finite positive measure,  $\mu$  也是一个 finite positive measure, 则存在  $\epsilon > 0$  和 nontrivial measurable  $E$ , 使得  $\tilde{\nu} \geq \epsilon\mu$  on  $E$ .

于是:

$$g := f + \epsilon\chi_E \in \mathcal{F}$$

而  $\int f d\mu = a$ , 因而

$$\int g d\mu > a$$

这和  $g \in \mathcal{F}$  冲突 (否则它的积分一定小于等于  $a$ ).

从而,  $\mu, \nu$  是 finite p.m. 的情况得证.

**Step 5:** 推广至  $\nu$  finite s.m.,  $\mu$  finite p.m. 的情况.

直接 Apply Step 1 to  $\nu^+, \nu^-$  即得证.

**Step 6:** 推广至  $\nu, \mu$   $\sigma$ -finite 的情况.

Proof: By  $\sigma$ -finite 的定义, 我们可以 decompose

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

那么 by finite case,  $\nu|_{X_n}, \mu|_{X_n}$  is finite for each  $n$ .

因而

$$f_n := \frac{d(\nu|_{X_n})}{d(\mu|_{X_n})} \exists \quad \text{for each } n$$

于是, take

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n} f_n$$

即可得证.

**Note:** 这里的  $f$  是 ext  $\mu$ -intble 的, 即:  $f^+, f^-$  至少有一个是 ext  $\mu$ -intble 的. 这 follows from  $\nu$  作为一个 signed measure 的定义:  $\nu$  至多 admit  $+\infty, -\infty$  中的一个.

**Specially,** 如果  $\nu$  是一个 positive measure, 那么  $f$  一定也是非负的, 从而  $f^- = 0$ .

**Remark** 在 RN Thm 的 proof 中, 我们的大体思路就是: 首先, 肯定要 reduce to 我们熟悉的 finite positive measure 的情况; 其次, 我们使用一个 trick: 取一个能够逐步逼近 RN derivative  $\frac{d\nu}{d\mu}$  的空间

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(\mu) : \int_E f d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{A} \right\}$$

并猜想其最大的元素就是  $\frac{d\nu}{d\mu}$ , 然后证明它们确实相等, by proving 它们的差是一个 zero measure.

下一个 lecture: 我们将 upgrade RN Thm to 一个更加 general 的 version: Lebesgue Radon Nikodym Thm.

## 11.2 Lebesgue-Radon-Nikodym Theorem [Fol 3.2, finished; 3.3, finished]

recall Radon-Nikodym Theorem:

$$\begin{cases} \mu \text{ } \sigma\text{-finite p.m.} \\ \nu \text{ } \sigma\text{-finite s.m.} \\ \nu \ll \mu \end{cases} \implies \begin{cases} \exists! \text{ extended } \mu\text{-integrable } f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ d\nu = f d\mu \end{cases}$$

我们称  $f$  为 Radon-Nikodym Derivative:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

**Example 11.4** Application: conditional expectation.

$$(X, \mathcal{A}, \mu) := \left( [0, 1), \mathcal{B}([0, 1)), m \right)$$

$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  Borel measurable.

Define:

$$B := \left\{ \emptyset, \left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right), X \right\}$$

$f$  并非一定是  $B$ -measurable 的.

11.2.1 LRNT: 任意  $\sigma$ -finite  $\nu, \mu$ , 可将  $\nu$  拆解成  $\lambda \perp \mu$  和  $\rho \ll \mu$

**Theorem 11.3 (Lebesgue-Radon-Nikodym Theorem)**

如果  $\begin{cases} \mu \text{ } \sigma\text{-finite p.m.} \\ \nu \text{ } \sigma\text{-finite s.m.} \end{cases}$  on  $(X, \mathcal{A})$ , 那么存在唯一的 decomposition

$$\nu = \lambda + \rho$$

where  $\lambda, \rho$  是  $\sigma$ -finite 的 signed measure s.t.  $\begin{cases} \lambda \perp \mu \\ \rho \ll \mu \end{cases}$ .

(于是, by RNT, 存在  $\mu$ -unique 的 extended  $\mu$ -integrable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  s.t.  $d\rho = f d\mu$ ).



Sktech of proof of LRN theorem: Assume for simplicity that  $\mu, \nu$  是 finite p.m.

Like last time, look at

$$\mathcal{F} := \{f \in L^+ : \int_E f d\mu \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}\} / \sim$$

Saw:  $\mathcal{F}$  有 max element  $f$ .

Define  $\rho$  by  $d\rho = f d\mu$ .

Set:

$$\lambda := \nu - \rho$$

Want:  $\lambda \perp \mu$ .

Prove by contradiction: 如果  $\lambda \not\perp \mu$ , 那么 Lemma 2 告诉我们: 存在  $\epsilon > 0$  和 positive measure 的  $E \in \mathcal{A}$  使得:

$$\lambda \geq \epsilon \mu$$

on  $E$ .

Set

$$g := f + \epsilon \chi_E$$

则

$$\int_F g d\mu = \int_{F \cap E} (f + \epsilon) d\mu + \int_{F \cap E^c} f d\mu$$

因而

$$\begin{aligned} \rho(F \cap E) + \epsilon \mu(F \cap E) + \rho(F \cap E^c) &= \rho(F) + \epsilon \mu(F \cap E) \\ &\leq \nu(F) - \epsilon \mu(F) + \epsilon \mu(F \cap E) \\ &\leq \nu(F) \end{aligned}$$

因而  $g \in \mathcal{F}$  且  $g > f$ .

从而得证  $\lambda \perp \mu$ . 从而 existence proved.

Uniqueness part: Suppose we have

$$\nu = \lambda_1 + \rho_1 = \lambda_2 + \rho_2$$

where  $\lambda_i \perp \mu, \rho_i \ll \mu$ . 那么

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2 - \rho_1$$

我们知道,  $\lambda_1 - \lambda_2$  和  $\rho_2 - \rho_1$  也是 signed measures. 并且,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \perp \mu, \quad (\rho_2 - \rho_1) \ll \mu$$

By Lemma 1:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2 - \rho_1 = 0$$

Properties of the RN derivative: (P91 in Folland)

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

$$\nu \ll \mu, \mu \ll \nu \implies \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu} = 1$$

$\mu$ -a.e. =  $\nu$ -a.e.

### 11.2.2 complex measure 以及 complex version of LRNT

#### Def 11.3 (complex measure)

一个 complex measure on a measurable space  $(X, \mathcal{A})$  是一个 map  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfying  $\nu(\emptyset) = 0$  以及 ctbl disjoint additivity.



**Example 11.5** simple complex measures:

$X = \{1, 2, \dots, n\}$   $\nu$  p/s/c measure on  $X$ .

Since  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , a complex measure  $\nu$  is just a function

$$\nu_0 : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{i.e., } \nu_0 = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n.$$

而

$$\nu(E) = \sum_{x \in E} \nu_0(x)$$

$\nu$  positive:  $\in \mathbb{R}_+^n$   $\nu$  signed:  $\in \mathbb{R}^n$

For discrete spaces, the total variation measure is defined pointwise:

$$|\nu|(i) := |\nu_i|, \quad \text{for each } i = 1, \dots, n.$$

So the total variation measure  $|\nu|$  is just the vector of magnitudes:

$$|\nu| = (|\nu_1|, |\nu_2|, \dots, |\nu_n|).$$

What is  $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ ?

Since this is a finite discrete setting, the Radon-Nikodym derivative is computed **\*\*pointwise\*\***:

$$\left( \frac{d\nu}{d|\nu|} \right) (i) = \begin{cases} \frac{\nu_i}{|\nu_i|} & \text{if } \nu_i \neq 0, \\ 0 & \text{if } \nu_i = 0. \end{cases}$$

So the result is a function  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , given by:

$$f(i) = \begin{cases} \frac{\nu_i}{|\nu_i|} & \text{if } \nu_i \neq 0, \\ 0 & \text{if } \nu_i = 0. \end{cases}$$

$$f := \frac{d\nu}{d|\nu|} = \left( \frac{\nu_1}{|\nu_1|}, \frac{\nu_2}{|\nu_2|}, \dots, \frac{\nu_n}{|\nu_n|} \right), \quad \text{with the convention } \frac{0}{0} := 0.$$

This derivative is a function that lives on the unit circle in  $\mathbb{C}$  (except at zero), and it satisfies:

$$|f(i)| = 1 \quad \text{whenever } \nu_i \neq 0.$$