Lec 2 Probability space intro

2.1 probability space

我们这里跳过所有 measure theory 的内容, 见 notes on measure theory.

Def 2.1 (prob space, prob measure, sample space, event space)

一个 probability space 就是一个 measure space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 其中 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
对于这样的 measure $\mathbb{P}$, 我们称之为 **probability measure (概率测度, 即概率)**.
而这里的 Ω 我们称之为 **sample space** (样本空间); 这里的 σ-algebra $\mathcal{F}$, 我们称之为 **event space** (事件空间).
任意的 $A \subset \Omega$ 都是一个 **event**, 但是概率论中只考虑 $A \in \mathcal{F}$, 即 measurable event. 为简化, event 这个单词就指 measurable event.

♣

Remark 回顾一下 measure space 的定义:

- 一个 set Ω 的一个 σ-algebra 就是一个包含空集的子集簇, 其 **closed under countable unions and complements**. (如果只 closed under finite unions, 则只称为一个 algebra.)
- 一个 Borel algebra 是一个定义在 topological space 上的 σ-algebra, 由 all open sets 生成. (因而: closed under countable unions and complements.) $\mathbb{R}$ 的 Borel algebra 可以由 all open intervals 生成.
- 一个 measure on a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$ 就是一个从 $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 的函数, 满足 **countable additivity**.
- measure 的性质: **(1)non-negativity, (2) monotonicity, (3) countable subadditivity, (4) inclusion-exclusion principle (上节已讲), (5) continuity from below and above.** 第 (5) 条具体即: For measurable sets $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$, then $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
  For measurable sets $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$, then $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Remark 对于 discrete 的 prob space 而言, 通常选取 $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, 即 Ω 的任意子集都是一个 event.

Remark 概率空间的现实意义是: 一次 experiment 的所有可能的结果的集合, 以及每个结果的概率.

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ 是一次 experiment 的可能的结果}\}$$
$$\mathbb{P}(\omega) = \text{ 结果 } \omega \text{ 的可能性}$$

Example 2.1 (dice roll) 如果我们掷一个 6 面的骰子, 那么样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 一个可能的事件是 $A = \{1, 2\}$. 如果假设骰子是公平的 (所有结果都是等可能的), 那么事件 A 的概率是

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Number of favorable outcomes}}{\text{Total number of outcomes}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$$

根据我们 measure-based 的定义, 这一结果自然 follows from countable additivity of $\mathbb{P}$.

Example 2.2 三个人独立地掷一个 6 面的骰子, 求第三个人掷出的点数等于前两个人的点数之和的概率.

Sol. 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$. event: $E = \{\omega \in \Omega \mid \omega_3 = \omega_1 + \omega_2\}$.
这个 event 有 15 个 elements:

$$E = \{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 4), \cdots, (2, 1, 3), (2, 2, 4), \cdots, (3, 1, 4), \cdots, (4, 1, 5), \cdots, (5, 1, 6)\}$$

因此, 概率是:

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$$

Example 2.3 两个人计划在 12:00 到 1:00 之间碰面. 他们各自都会在期间的某个时间点到达. 求: 他们彼此不会等待对方超过 10 分钟的概率.

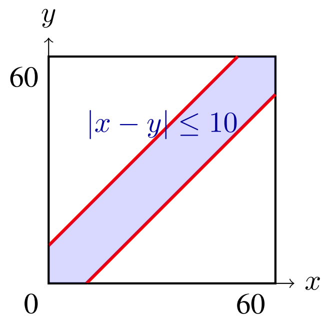
Sol. Sample space

$$\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60,0\le y\le 60\}=[0,60]\times[0,60]$$

我们要求概率的事件

$$E=\{(x,y)\in\Omega:|x-y|\le 10\}$$

容易画出图像:



因而概率是

$$\mathbb{P}(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{3600-2500}{3600}=\frac{11}{36}$$

2.2 conditional probability

Def 2.2 (conditional probability)

对于 probability space $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, 给定一个 event $B\in\mathcal{F}$, 如果 $\mathbb{P}(B)>0$, 我们定义 conditional probability of an event $A\in\mathcal{F}$ given B 为:

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

♣

Proposition 2.1 (decomposing probability of intersection of events)

令 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个 seq of events, 对于任意 $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)=\mathbb{P}\left(A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_2\mid A_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_3\mid A_1\cap A_2\right)\ldots\cdot\mathbb{P}\left(A_n\mid A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)$$

♠

Proof Naturally follows from the def.

2.2.1 Law of total probability and Bayes' Theorem

Theorem 2.1 (law of total probability)

令 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个 seq of **pairwise disjoint** events, 如果 $\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, 那么对于任意 event $E \subseteq \Omega$:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(E \mid A_i)$$

Proof

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(E \cap \cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} E \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(E \mid A_i)$$

Remark $P(A_i)P(E \mid A_i)$ 就等于 $P(E \cap A_i)$, 也就是在 A_i 这个区域上, E 的 measure. 因而 disjoint union 之下就是 E 的完整 measure.

Theorem 2.2 (Bayes theorem)

If $A, B \subseteq \Omega$ such that $\mathbb{P}(B) \neq 0$, then

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remark 这其实是一个非常直接的结果, 因为 $P(A)\dot{P}(B \mid A) = P(A \cap B)$.
但是它的意义在于, 如果我们知道两个事件的概率和其中一个对另一个的条件概率, 我们就也得到了反过来的条件概率.

Example 2.4 (Medical testing)
在一个群体中, 随机选取一个人患有某种罕见疾病的概率是 0.001. 该疾病有一个诊断测试, 其性质如下: 给定个体患病, 测试呈阳性的概率 (真正阳性率) 是 0.99. 给定个体健康, 测试呈阳性的概率 (假阳性率) 是 0.02. 从群体中随机选取的一个人测试呈阳性. 该个体实际上患有该疾病的概率是多少? 于是

Sol. 由 law of total probability, 我们有

$$\mathbb{P}(\text{positive}) = \mathbb{P}(\text{positive} \mid \text{sick})\mathbb{P}(\text{sick}) + \mathbb{P}(\text{positive} \mid \text{healthy})\mathbb{P}(\text{healthy}) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097$$

于是

$$\mathbb{P}(\text{sick} \mid \text{positive}) = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} \approx 0.047$$

Example 2.5 (Monty Hall problem)
假设你参加一个游戏节目, 面前有三扇门: 一扇门后面有一辆车; 其他两扇门后面是山羊. 你选择了一扇门, 比如说是 1 号门, 然后主持人打开了另一扇门, 比如说是 3 号门, 里面有一只山羊. 然后他说 " 你想换成 2 号门吗?". 换门对你有利吗?

Sol. 令 A_i 表示: car 在 i 号门后面; B 事件表示: 主持人打开 3 号门. 我们要求的概率是在事件 B 发生的情况下, A_2 的个概率, 即 $\mathbb{P}(A_2 \mid B)$. 它的大小是:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2 \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_2)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B \mid A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B \mid A_3)\mathbb{P}(A_3)} \\
&= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

因而, 换门是有利的.

Remark 这是一个非常反直觉的例子. 我们直觉肯定会觉得: 一共 1 辆车和 2 个山羊, 主持人帮忙排除掉了一个山羊, 那么剩下来的两个里面我们二选一, 肯定是 $1/2$ 概率, 而这个 ” 更换与否” 就是二选一的抉择. 但其实不是这样的.

在第一次选择和第二次选择之间, 主持人带来了额外的信息.

- 不换门: win iff 在一开始就选择对了车, 这个概率是 $1/3$.
- 换门: win iff 在一开始选择的是山羊, 这个概率是 $2/3$.

从条件概率的视角来看:

- 如果车在 2 号门: 主持人在这个环节里只能选择 3 号门.
- 如果车在 1 号门: 主持人在这个环节里可以随机在 2 号和 3 号门里面选择一扇门.

也就是说, 主持人打开 3 号门的这个动作, 把 3 号门原本含有的 ” 中奖潜力” 全部转移给了 2 号门. 这很反直觉. 但是可以用一段 python 程序验证:

```
import random

def monty_hall_sim(trials=10000):
    stay_wins = 0
    switch_wins = 0

    for _ in range(trials):
        # 1. 初始化门: 0代表羊, 1代表车
        doors = [0, 0, 0]
        car_position = random.randint(0, 2)
        doors[car_position] = 1

        # 2. 玩家最初的选择
        player_choice = random.randint(0, 2)

        # 3. 主持人打开一扇有山羊的门
        # 主持人不能开玩家选的门，也不能开有车的门
        possible_host_doors = [
            i for i in range(3)
            if i != player_choice and doors[i] == 0
        ]
        host_opens = random.choice(possible_host_doors)

        # 4. 如果"坚持不换"赢了
        if doors[player_choice] == 1:
            stay_wins += 1

        # 5. 如果"换门"赢了
        # 换门后的选择是：既不是原选，也不是主持人开的那扇
        remaining_door = [
            i for i in range(3)
```

```python
            if i != player_choice and i != host_opens
        ][0]

        if doors[remaining_door] == 1:
            switch_wins += 1

    print(f"总实验次数: {trials}")
    print(f"坚持不换中奖次数: {stay_wins} (概率: {stay_wins/trials:.2%})")
    print(f"换门后中奖次数: {switch_wins} (概率: {switch_wins/trials:.2%})")

if __name__ == "__main__":
    monty_hall_sim()
```

Listing 2.1: Monty Hall problem simulation

运行结果:

```
总实验次数: 10000
坚持不换中奖次数: 3312 (概率: 33.12%)
换门后中奖次数: 6688 (概率: 66.88%)
```

Listing 2.2: Monty Hall problem simulation result

Example 2.6 (Wizards)
两个巫师 A 和 B 进行决斗, 他们轮流射击对方. 巫师 A 每次射击命中 B 的概率是 $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$, 而巫师 B 每次射击命中 A 的概率是 $\mathbb{P}(B)=\frac{2}{3}$. 巫师 A 先开枪. 求: 巫师 A 获胜的概率是多少?

Sol. 任意一轮射击 (假设前一轮没有结束, 于是游戏回到初始状态. 因而任意一轮都是独立的) 中, 令 W_A 为事件: A 获胜; W_B 为事件: B 获胜, 假设他们从各自开始射击. 根据全概率公式, 我们有

$$\mathbb{P}\left(W_A\right)=\mathbb{P}(\text{hit})\mathbb{P}\left(W_A \mid \text{hit}\right)+\mathbb{P}(\text{miss})\mathbb{P}\left(W_A \mid \text{miss}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(W_B^c\right)$$
$$\mathbb{P}\left(W_B\right)=\mathbb{P}(\text{hit})\mathbb{P}\left(W_B \mid \text{hit}\right)+\mathbb{P}(\text{miss})\mathbb{P}\left(W_B \mid \text{miss}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathbb{P}\left(W_A^c\right)$$

Solving the system, we find $\mathbb{P}\left(W_A\right)=0.6$.
Remark 这个例子表明了先手优势有多大. 相比上一个例子, 这是很直观的.
另外, 这个例子有趣的是, 我们把无限的回合转化为了一个循环结构, 利用游戏状态的自相似, 只需要考虑任意一轮即可.

2.2.2 Kolmogorov definition of conditional probability

我们通过 $\mathbb{P}(A \mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ 定义出来的 conditional probability 有一个限制, 就是 enforce $\mathbb{P}(B)>0$. 但是, 难道 $\mathbb{P}(B)=0$ 就不能定义条件概率了吗? 我们考虑一个连续情况: 在 $\mathbb{R}^3$ 中任意选择一个点, 求: 该点位于单位球面上的概率. 显然, 这个概率是 0. 但是, 如果我们知道该点位于单位球内, 那么该点距离原点的距离为 1 的概率应当为 1. 也就是说, 即使在 $\mathbb{P}(B)=0$ 的情况下, 我们也希望定义 $\mathbb{P}(A \mid B)$.
在考虑这个定义之前, 首先我们发现: 基于我们先前定义的 conditional probability, 我们可以获得一个新的 probability space:

Def 2.3 (conditional probability space and trace σ-algebra)

对于给定的 prob space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 给定一个 event $B \in \mathcal{F}$ 且 $\mathbb{P}(B) > 0$, 我们定义 conditional probability space as the triplet $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}(\cdot \mid B))$, 其中:

$$F_B := \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$$

被称为 **trace σ-algebra on** B.
容易验证, 这个 triplet 是一个 prob space. ♣

Remark 当我们把整个 prob space 限制在 event B 上时, 本质上是在做一个 Radon-Nikodym derivative 的操作.
定义 $f := \frac{\mathbb{I}_B}{\mathbb{P}(B)}$, 那么对于任意 event $A \in \mathcal{F}_B$, 有:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \int_A f \, d\mathbb{P}$$

因而和我们的直觉一样, 条件概率是通过一个 density function 来重新加权原本的概率测度.
既然这样, 我们能否直接从一个新的 prob space $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}(\cdot \mid B))$ 出发, 来定义条件概率呢? 这就是 Kolmogorov 的定义:

Def 2.4 (Kolmogorov definition of conditional probability)

对于给定的 prob space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 设 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个 sub-σ-algebra. 对于 event $A \in \mathcal{F}$, 条件概率 $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ 是一个 $\mathcal{G}$-measurable 的随机变量, 其满足对于任意 $G \in \mathcal{G}$, 有:

$$\int_G \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}) \, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap G)$$

显然, 当 $\mathbb{P}(B) > 0$ 时, 这个定义和我们之前的定义是等价的.
这个 random variable $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ 在 $\mathbb{P}$-a.s. 意义下是唯一的. ♣

Remark 条件概率 $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ 这个测度是 $\mathbb{P}(A \cap \cdot)$ 这个测度相对于背景测度 $\mathbb{P}$ 在子信息流 $\mathcal{G}$ 下的 Radon-Nikodym derivative, 也就是一个密度函数.
这个定义里没有指明, 给定一个 event $B \in \mathcal{F}$, 如何去确定 $\mathcal{G}$ 以及 $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$. 虽然这是一个抽象的存在性 & 唯一性定义, 但是标准的做法是:

- 看向产生 B 的 random variable X, 即 $B = \{X = x\}$, 令 $\mathcal{G} = \sigma(X)$, 即由 random variable X 生成的 σ-algebra. 这个 σ-algebra 包含了所有关于 X 可能取值的信息.
- 既然 $\mathbb{P}(A \mid \sigma(X))$ 是关于 $\sigma(X)$ 可测的, 那么它一定可以写成 $h(X)$ 的形式. 通过对 X 的所有可能取值进行积分, 我们确定了函数 $h(\cdot)$ 的整体形态, 这时我们定义 $P(A \mid X = x)$ 为函数 h 在点 x 处的值.
- $\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G})$ 实际就是条件期望 $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A \mid \mathcal{G}]$. 当 $\mathbb{P}(B) > 0$ 时, 它就退化回经典定义 $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Remark Further issue: **Borel-Kolmogorov paradox**.
即便是这个定义, 也会出现问题.
给定一个事件 B, 如果 $\mathbb{P}(B) = 0$, 则 $\mathbb{P}(A \mid B)$ 的取值取决于我们将 B 嵌入到哪一个随机变量 X 中. 不同的随机变量 X, Y 即使都能产生相同的事件 $\{X = x\} = \{Y = y\} = B$, 它们生成的子 σ-代数 $\sigma(X)$ 和 $\sigma(Y)$ 却不同, 导致最终确定的条件概率 $h_X(x) \neq h_Y(y)$.
为了解决这个问题, 可以引入更精细的结构, 比如说 regular conditional probability, 以及 disintegration theorem. 不过此处不展开了.

2.3 independence

Def 2.5 (independence of events)

对于 prob space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 两个 events $A, B \in \mathcal{F}$ 如果有

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

则称 A 和 B 是 independent 的.

更加 generally, 对于任意 collection of events $\{A_i\}_{i \in I}$, 如果对于任意有限子集 $J \subseteq I$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

则称 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 mutually independent 的. ♣

Remark 根据条件概率的定义, 容易得出: 两个 events A, B independent 的定义等价于 $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, 即事件 B 的发生与否不影响事件 A 发生的概率.

将它推广到多个事件: 即任意一个事件的发生与否都不影响其他事件发生的概率.

Proposition 2.2

如果 events A 和 B independent, 则 A 和 B^c 也是 independent 的. ♠

Proof

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A^c \cap B^c\right) &= \mathbb{P}\left((A \cup B)^c\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}\left(A^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(B^c\right)
\end{aligned}$$

Example 2.7 (Pairwise Independence vs. Mutual Independence)

一组事件 $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ 如果是 mutually independent 的, 则它们两两 independent. 但是反过来不成立. 即: 即便对于任意 $i \neq j$, 有 $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$, 也并不意味着这些事件是 **mutually independent** 的.

下面为一个 counterexample: 考虑掷两个骰子. 令事件

$$A := \{\text{first roll is } 4\}, \quad B := \{\text{second roll is } 3\}, \quad C := \{\text{the sum of the two outcomes is } 7\}$$

我们发现: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6^3}$, 因而 A, B, C 并不 mutually independent. 然而, However, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ and $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, 因而它们两两 pairwise independent.

Remark 这个反例能够成功的理由是: 事件 C (总和) 和 事件 A (第一个骰子) 以及事件 B (第二个骰子) 分别都是独立的, 因为知道了其中一个并不会影响另一个的概率. 但是, 一旦我们知道了 A 和 B 的值, 那么 C 的值就被完全确定了 (因为总和就是两个骰子的和). 因而, 三个事件并不 mutually independent. (注意: 如果 C 事件不是和为 7 而是一个小于 7 的数, 那就不是了, 因为如果我们知道第一次是 6, 那么和就不可能是 6, 那么就也失去了 pairwise independence).

这个例子说明了, mutual independence 是一个比较强的条件. 我们可以把这三个事件看作是对结果空间的约束:

- 两个骰子的结果空间有 36 个点.

- A 是一条线 (6 个点), B 是另一条线 (6 个点), C 是一条对角线 (6 个点)。
- 两两独立: 意味着任意两条线相交的点数, 恰好符合概率乘积.
- 相互独立: 要求这三条线交于一点的概率也符合乘积.

这个例子提醒我们: 独立性不是一种可以由低维向高维简单 " 归纳 " 的性质. 一个系统可以局部解耦 (两两独立, 但在全局尺度上却存在强耦合. 总之 mutual independence 是一个很强的条件.

Example 2.8 (coin tossing)

假设我们有一枚不均匀的硬币, 掷出正面的概率是 $p \in [0,1]$, 反面的概率是 $1-p$. 我们不断地掷这枚硬币, 直到第一次掷出正面为止, 并记录所需的掷币次数. 求: 掷币次数为奇数的概率是多少?

Sol. 对于任意 $i \in \mathbb{N}$, 考虑事件 $A_i = \{$ 掷币次数为 $i\}$.

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{2n-2} p = p \sum_{n=1}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

Remark 这个问题还可以通过 law of total probability 来解决.

令 $E =$ 掷币次数为奇数. 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\text{head}) \cdot \mathbb{P}(E \mid \text{head}) + \mathbb{P}(\text{tail}) \cdot \mathbb{P}(E \mid \text{tail}) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (1 - \mathbb{P}(E))\end{aligned}$$

Solve 这个 equation 得到同样结果.